MATEMATICKÝ MODEL GINIHO KOEFICIENTU A ZHODNOCENÍ REDISTRIBUČNÍ FUNKCE DAŇOVÉHO SYSTÉMU ČESKÉ REPUBLIKY

Marian Genčev, Denisa Musilová, Jan Široký*

Abstract

A Mathematical Model of the Gini Coefficient and Evaluation of the Redistribution Function of the Tax System in the Czech Republic

The paper deals with two related topics – a mathematical model of the Gini coefficient, and its application in the taxation theory. However, the mathematical part of the paper should not only be understood as a traditional methodological starting point, but it has also didactic character and correctly describes the properties of the Gini coefficient, pointing to misinterpretation deficiencies found in a number of contemporary works. In the application part of the paper, we study the fulfillment of redistribution function of the tax system in the Czech Republic by using the Musgrave-Thin index coefficient *M*. Our research implies that the global progressivity of the tax allowance system in the Czech Republic was moderately progressive throughout the analyzed period 2006–2016. The considerable change in the personal income tax structure made in 2008 did not essentially reflect the global tax progressivity.

Key words: tax progressivity, Gini coefficient, Lorenz curve, redistribution

JEL Classification: C02, C65, H23, H24

Úvod

Nerovnosti v rozdělení příjmů a bohatství jsou nedílnou součástí každého lidského společenství. Faktory, které nerovnosti ovlivňují, jsou rozličné a často mohou působit i společně. Úlohou vlády je prostřednictvím patřičných nástrojů zejména z oblasti fiskální politiky (zevrubněji World Bank, 1990) zmírňovat tyto nerovnosti. To se děje především nastavením, resp. změnami, v daňově-dávkovém systému (Chenery *et al*., 1974).

Abychom však mohli dopady ve změnách daňově-dávkového systému správně vyhodnotit (především míru nerovnosti rozdělení příjmů ve společnosti a daňovou progresivitu), je nutné použití adekvátních matematických metod a správná interpretace získaných výsledků. K posouzení rozdělení příjmů domácností v České republice je zpravidla používán Giniho koeficient vycházející z decilového rozdělení příjmů zpřístupněných prostřednictvím databáze Českého statistického úřadu (ČSÚ, 2017). K vyhodnocení daňové progresivity jsou potom využívány další číselné indikátory, jejichž výpočet může vyžadovat právě zmíněný Giniho koeficient (např. Musgrave-Thinův index globální progresivity *M*).

* **Marian Genčev** (marian.gencev@vsb.cz); **Denisa Musilová** (denisa.musilova.st@vsb.cz); **Jan Široký** (jan.siroky@vsb.cz), VŠB – Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta.
Tento článek je jedním z výstupů projektu SP2018/62.

V souvislosti s běžným užitím Giniho koeficientu v odborných pracích (bakalářských, diplomových, odborných článcích, monografiích apod.) však poměrně často dochází k metodologickým nepřesnostem nejen v terminologii, ale také v jeho samotných vlastnostech. Vyjmenujme v úvodu dvě hlavní nepřesnosti, které je možné často zaregistrovat.

- *Hodnota Giniho koeficientu rovna jedné je interpretována jako nejvyšší možná míra nerovnosti v příjmech domácností.* Lze však matematicky dokázat, že pokud vycházíme z diskrétních dat, je Giniho koeficient vždy menší než jedna, podkapitola 1.3.
- *Giniho koeficient je definován pomocí tzv. Lorenzovy křivky.* Ovšem definovat seriózní pojem z matematické statistiky pomocí grafické interpretace určitého ekonomického jevu (zde míry příjmové nerovnosti) jako seriózní označit nelze. Jak plyne korektní zavedení Lorenzovy křivky pouze z definice Giniho koeficientu, je vysvětleno v podkapitole 1.7, jejímž cílem je upozornit na směšování definice pojmu s jeho geometrickou interpretací.

První část tohoto článku je tedy motivována snahou nápravy výše uvedených, resp. dalších nepřesností. V každé podkapitole se tak vyskytují konkrétní doporučení (celkem sedm), při jejichž dodržení by nemělo docházet k nežádoucím odchylkám v rámci užití pojmu Giniho koeficient. Jeho cílem je prezentovat čtenářům, že striktním a obecným definováním lze pomocí elementárního aparátu korektně matematicky dokázat nejen základní vlastnosti Giniho koeficientu, ale také vysvětlit, jak takto zavedená definice umožňuje jednoznačnou grafickou interpretaci v podobě Lorenzovy křivky.

Dále by autoři ve spojitosti s první částí článku rádi připomněli, že existují zahraniční matematické odborné práce (např. Cerone, Dragomir, 2006), které značně zobecňují pojem Giniho koeficientu a odvozují vybrané vlastnosti takového zobecnění (a tedy ve speciálním případě i Giniho koeficientu). Tyto práce jsou však pro ekonomickou komunitu ve většině případů nečitelné kvůli použití pokročilého matematického aparátu a značné míry abstrakce. Abychom našich cílů v první části článku mohli dosáhnout, volíme základní matematický aparát založený pouze na manipulaci s konečnými součty zapsanými sumační symbolikou. Žádné speciální znalostní předpoklady vyšší matematiky tedy nejsou nutné.

Cílem aplikační části článku je výpočet Giniho koeficientu v České republice v období let 2006–2016 (kapitola 2) a tomuto období odpovídající zhodnocení globální progresivity daňově-dávkového systému pomocí Musgrave-Thinova indexu *M* (kapitola 3) s poukázáním na její dosavadní vývoj. V České republice ve zkoumaném období nedošlo k převratným změnám[1] v legislativních úpravách daňového systému a systému transferů (Marek, 2010), z podstatných změn je možné uvést především nahrazení klouzavě progresivní sazby rovnou sazbou daně s účinností od 1. 1. 2008[2] a taktéž škrty v běžných výdajích rozpočtu, jimiž česká vláda naplňovala v letech 2009–2011 politiku konsolidace[3] veřejných financí (Vančurová, Láchová, 2018).

1 Autoři dle svého přístupu za převratnou změnu považují změnu celého systému daní nebo transferů.

2 Dle odstavce 12, § 6 zákona č. 586/92 Sb., o daních z příjmů, účinného od 1. 1. 2008.

3 Rozsáhlý zákon č. 261/2007 Sb., o stabilizaci veřejných rozpočtů, změnil 46 dalších zákonů.

1. Vybrané matematické aspekty Giniho koeficientu

V této kapitole budou pozorovány některé teoretické aspekty měření příjmové nerovnosti. V jejích jednotlivých částech bude často abstrahováno od konkrétních pojmů, čímž chceme docílit vyšší konzistence textu. Především budeme jednoduše místo o domácnostech uvažovat o jedincích a jejich příjmech. Počet jedinců v pozorovaném souboru obecně označíme n a jejich příjmy $x_1, \ldots, x_n$, přičemž předpokládáme, že tyto hodnoty jsou nezáporné. Míra příjmové nerovnosti je tedy závislá na hodnotách datového souboru $x_1, \ldots, x_n$, a proto lze o příslušném indikátoru uvažovat jako o reálné funkci n reálných proměnných.

1.1 Definice Giniho koeficientu

Pro měření příjmové nerovnosti n jedinců byl zaveden pojem známý v současné době pod názvem *Giniho koeficient*. Původní záměr italského matematika C. Giniho lze vysledovat v historicky laděném článku (Ceriani, Verme, 2012), v němž je uvedeno třináct jeho návrhů pro různé indikátory měřící hodnotovou nerovnost číselného souboru. V průběhu vývoje aplikované matematiky, vycházejícího částečně z potřeb vědních okruhů, jakým je jistě i ekonomie, se však paradoxně pro měření příjmové nerovnosti ve své přesné podobě neustálil ani jeden z výrazů navržených Ginim. Po různých modifikacích byla nakonec pro „Giniho“ koeficient přijata definice

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{2n\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \sum_{1 \le i, j \le n} \left| x_i - x_j \right|, \tag{1}$$

v níž se ze zřejmých důvodů předpokládá kladnost součtu prvků x_i. Pouhý předpoklad $x_i \geq 0$ je nedostačující. Výraz v (1) je možno nalézt v řadě současných učebnic, např. (Zvára, 2013) nebo (Lambert, 2002), který velmi podrobně pojednává o příjmové nerovnosti jak z matematického, tak i z aplikačního hlediska. S ohledem na existenci výrazu (1) a výše uvedené poznámky připojujeme následující doporučení.

- *Definujeme-li Giniho koeficient pomocí výrazu* (1)*, je nutno nahradit předpoklad o nezápornosti příjmů předpokladem o kladnosti jejich součtu.*

V dalších podkapitolách se již zaměříme na vyšetření některých pro aplikace důležitých vlastností Giniho koeficientu založených výhradně na uvedené definici (1).

1.2 Absolutní příjmová rovnost

Provedeme-li krátké elementární pozorování pro případ, že všichni jedinci disponují týmž nenulovým příjmem x, tj. $x_1 = \cdots = x_n = x$, snadno zjistíme, že druhá suma ve výše uvedené definiční rovnosti (1) je nulová. Odtud dostáváme důležitý vztah

$$G(x, x, \ldots, x) = 0, \quad x \neq 0. \tag{2}$$

Současně je z definičního vztahu (1) patrné, že pokud bude alespoň jedna z hodnot $x_1, \ldots, x_n$ různá od některé jiné z tohoto souboru, potom je druhá suma v (1) kladná a Giniho koeficient tak nabývá kladné hodnoty.

Politická ekonomie, 2018, 66(6), 732–750, https://doi.org/10.18267/j.polek.1232

Odtud proto vyplývá

$$G(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) > 0, \qquad x_i \neq x_j. \tag{3}$$

S ohledem na skutečnost, že Giniho koeficient nabývá nulové hodnoty jen tehdy, když všichni jedinci disponují týmž nenulovým příjmem, má smysl hovořit o tzv. *absolutní příjmové rovnosti* korespondující s nulovou hodnotou Giniho koeficientu.

1.3 Obor hodnot Giniho koeficientu

V této podkapitole se budeme věnovat patrně nejzávažnější metodologické nejasnosti v řadě odborných textů, a sice že hodnota Giniho koeficientu může být rovna jedné, např. (Arnold, 2014), (Houghton, Khandker, 2009), (Jurečka a kol., 2013) nebo (Jantzen, Volpert, 2012). Cílem této části článku je odvození nerovnosti

$$0 \leq G(x_1, \ldots, x_n) < 1, \tag{4}$$

která je v rozporu s tvrzením o jednotkové hodnotě Giniho koeficientu. Vzhledem k tomu, že levá část nerovnosti již vyplývá ze samotného definičního vztahu (1), stačí dokázat její pravou část za předpokladu $\sum x_i > 0$. Z něho ovšem vyplývá existence alespoň jedné hodnoty x_k ze vstupního datového souboru, která je kladná (podržíme označení pro tento specifický prvek i dále). Proto platí

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} \left|x_i - x_j\right| &= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ (i,j)\neq(k,k)}} \left|x_i - x_j\right| \\ &< 2x_k + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ (i,j)\neq(k,k)}} \left|x_i - x_j\right|.\end{aligned} \tag{5}$$

Dále shora odhadneme poslední sumu v (5) obsahující absolutní hodnotu. To provedeme pomocí tzv. trojúhelníkové nerovnosti $|a + b| \leq |a| + |b|$. Položením $a = x_i$, $b = -x_j$ dostáváme relaci $|x_i - x_j| \leq |x_i| + |-x_j| = x_i + x_j$. Odtud je

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} \left|x_i - x_j\right| &< 2x_k + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ (i,j)\neq(k,k)}} \left(x_i + x_j\right) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(x_i + x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} x_i.\end{aligned} \tag{6}$$

Přímou aplikací získaného odhadu v (6) na definici Giniho koeficientu snadno nahlédneme, že

$$G(x_1, \ldots, x_n) < \frac{1}{2n\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot 2n\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{7}$$

tedy skutečně $G(x_1, \ldots, x_n) < 1$, ať je soubor přípustných příjmů $x_1, \ldots, x_n$ libovolný. Uzavíráme tak aktuální podkapitolu následujícím doporučením.

- *Používáme-li v aplikacích Giniho koeficient definovaný vztahem* (1)*, nelze tvrdit, že pro jeho hodnotu může platit* $G(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Se závěrem této podkapitoly se otevírá otázka, zda a s jakou kvalitou je možno se s hodnotou Giniho koeficientu přiblížit jedné. Odpověď nám poskytne další jednoduché pozorování prezentované v následující podkapitole.

1.4 Absolutní příjmová nerovnost

V podkapitole 1.2 jsme diskutovali o případu absolutní příjmové rovnosti nastávající právě tehdy, když příjmy všech jedinců jsou si navzájem rovny. Zdá se logické uvažovat o opačné extrémní skutečnosti, tj. *absolutní příjmové nerovnosti*, kdy právě jeden jedinec má kladný příjem x_k a ostatní mají nulové příjmy $x_i = 0$, $i \neq k$. Přímým výpočtem Giniho koeficientu z jeho definice však ihned dostáváme

$$G(0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{2nx_k} \cdot 2(n-1)x_k = 1 - \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Je tak zřejmé, že v případě absolutní příjmové nerovnosti nelze tento stav ztotožnit s jednotkovou hodnotou Giniho koeficientu. To, s jakou mírou se jednotkové hodnotě přiblížíme, závisí na počtu pozorovaných jedinců n (závislost na výši jediného nenulového příjmu x_k je podle (8) irelevantní). Budou-li např. jedinci pouze dva, je absolutní příjmová nerovnost charakterizována relativně nízkou hodnotou $G = 0{,}5$, avšak pro analogický stočlenný soubor bude již $G = 0{,}99$. S využitím pojmu suprema lze psát

$$\sup_{x_i \geq 0, n \in \mathbb{N}} G(x_1, \ldots, x_n) = 1, \tag{9}$$

kde uvedený zápis vyjadřuje, že hodnota Giniho koeficientu může být libovolně blízko jedné, avšak, podle (4), nikdy přesně rovna jedné. Uvádíme tak logicky následující doporučení.

- *Absolutní příjmovou nerovnost nelze ztotožňovat s jednotkovou hodnotou Giniho koeficientu. Na rozdíl od absolutní příjmové rovnosti je hodnota Giniho koeficientu v případě absolutní příjmové nerovnosti do značné míry ovlivněna počtem pozorovaných jedinců.*

Je tedy možné shrnout, že Giniho koeficient je reprezentován za daných podmínek hodnotami polouzavřeného intervalu $\langle 0,1)$. To nám v praxi umožňuje korektně uvažovat o Giniho koeficientu jako o indikátoru příjmové nerovnosti, kde:

- hodnota $G = 0$ indikuje absolutní příjmovou rovnost (dokonalé rozdělení příjmů),
- hodnota $G \approx 1$ indikuje značnou příjmovou nerovnost (ne nutně absolutní).

1.5 Homogenita Giniho koeficientu a její vztah k superhrubé mzdě

Při výpočtech Giniho koeficientu v konkrétních podmínkách je potřeba upozornit na specifikum českého výpočtu čisté mzdy prostřednictvím tzv. superhrubé mzdy[4] podle § 6, odst. 12 zákona o daních z příjmů (ZDP), ve znění pozdějších předpisů (další ekonomické souvislosti zmiňuje Vítek, 2008). Zanedbáme-li zaokrouhlování superhrubé mzdy na celé stokoruny nahoru, lze ji vypočíst jako 1,34násobek hrubé mzdy.

Cílem této podkapitoly je dokázat, že výraz definující Giniho koeficient $G(x_1, \ldots, x_n)$ je homogenní funkce stupně $s = 0$, tedy

$$G(t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n) = G(x_1, \ldots, x_n), \qquad t > 0. \tag{10}$$

Připomínáme, že u funkcí s touto vlastností nezáleží na tom, zda je za vstup vzat soubor $x_1, \ldots, x_n$ nebo soubor t-násobků $t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n$. Položíme-li v (10) $t = 1{,}34$, představuje levá strana příslušný Giniho koeficient z datového souboru superhrubých mezd, zatímco pravá strana představuje Giniho koeficient souboru hrubých mezd.

Zbývá již jen korektně dokázat platnost důležité vlastnosti vyjádřené identitou (10), což lze provést opět přímým použitím definice (1). Z příslušných předpokladů totiž máme

$$\begin{aligned} G(t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n) &= \frac{1}{2n\sum_{i=1}^{n} t \cdot x_i} \cdot \sum_{1 \le i, j \le n} \left| t \cdot x_i - t \cdot x_j \right| \\ &= \frac{1}{2nt\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot t \cdot \sum_{1 \le i, j \le n} \left| x_i - x_j \right|. \end{aligned} \tag{11}$$

Krácením kladné hodnoty t však pravá strana v (11) přechází v definiční výraz Giniho koeficientu (1). To dokazuje platnost vztahu (10).

Pro praktické účely vyplývá z předchozí úvahy následující doporučení.

- *Pro účely stanovení Giniho koeficientu institut superhrubé mzdy nehraje zásadní roli a je téměř identický, nebo dokonce zcela identický s Giniho koeficientem hrubé mzdy.*

1.6 Efektivní výpočet Giniho koeficientu

V této podkapitole uvedeme efektivní prostředek k výpočtu Giniho koeficientu, který bude obsahovat pouze jednorozměrnou sumaci. Aby bylo možné takový výpočet provést, bude nutno předpokládat, že datový soubor, ze kterého má být Giniho koeficient vypočítán, je již seřazen do neklesající (nenulové) posloupnosti, tedy předpokládáme mj. platnost podmínky

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n. \tag{12}$$

4 V současnosti (2018) neexistuje v Evropské unii další stát, který by „superhrubou“ mzdu při výpočtu standardní osobní důchodové daně používal (Schelleckens, 2017), a vlastní šetření.

Pokud data nejsou seřazena, provedeme uvedené seřazení a přeindexujeme soubor tak, aby platily příslušné nerovnosti uvedené v (12).

Práce s dvojnou sumou v definici Giniho koeficientu vyžaduje provedení značného počtu aritmetických operací. Je proto žádoucí transformovat takovou sumu na jednorozměrnou. Vhodnou manipulací lze docílit transformace[5]

$$\sum_{1 \le i, j \le n} \left| x_i - x_j \right| = 4\sum_{i=1}^{n} i x_i - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{13}$$

Proto podle (13) a definice (1) platí

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2n\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \left(4\sum_{i=1}^{n} i x_i - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \tag{14}$$

a konečně po roznásobení závorky dostáváme elegantní formuli

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1 - \frac{1}{n}, \tag{15}$$

která umožňuje rychlý výpočet nejen pomocí výpočetní techniky. Vzorec (15) zmiňuje třeba (Allison, 1978), avšak jeho odvození neuvádí. Analogii tohoto vztahu najdeme také např. v článku (Plata-Peréz *et al*., 2015). Považujeme však za důležité připomenout, že vztah (15) je uveden v oficiální metodice Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj, viz (OECD, 2017).

Zdá se, že vztah (15) není příliš znám, ačkoliv může značně snížit výpočetní složitost, a to obzvláště v případech rozsáhlých datových souborů. Bude-li např. počet prvků v souboru n = 1 000, vyžaduje definice Giniho koeficientu provedení řádově milionů aritmetických operací, zatímco vztah (15) řádově pouze tisíců operací. To nás přivádí k následujícímu doporučení.

- *Máme-li datový soubor uspořádaný do neklesající posloupnosti, lze jemu příslušející Giniho koeficient vypočítat značně efektivněji pomocí vzorce* (15).

1.7 Lorenzova křivka a grafické znázornění hodnoty Giniho koeficientu

Pro grafické znázornění hodnoty Giniho koeficientu je nejčastěji využívána tzv. Lorenzova křivka, kdy bývá nejprve zaveden samotný pojem Lorenzova křivka a na základě toho je charakterizován Giniho koeficient a jeho výpočet (např. Arnold, 2014 nebo Jurečka a kol., 2013). Vzhledem k tomu, že v aplikacích užívajících rigorózních kvantitativních nástrojů by měly být vždy východiskem korektní definice a předpoklady, zdá se málo logické zavést bez řádných souvislostí nejdříve Lorenzovu křivku a z grafického modelu poté provést další dedukci vedoucí k (definici) pojmu Giniho koeficient. Cílem této podkapitoly je proto odvození definice Lorenzovy křivky na základě vztahu (14) uvedeného v předchozí podkapitole.

5 Vztah (14) je uveden v (Sen, 1997), resp. (Zenga *et al.*, 2004).

Úvaha vedoucí ke korektní geometrické interpretaci Giniho koeficientu vychází i v této podkapitole z předpokladu, že soubor $x_1, \ldots, x_n$ tvoří neklesající nenulovou posloupnost nezáporných čísel. Taktéž pro přehlednost zaveďme výraz $S := S(x_1, \ldots, x_n)$ rovností

$$S(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{2n\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} x_i + \sum_{i=1}^{j} x_i \right). \tag{16}$$

Smysl zavedení výrazu S spočívá v tom, že s jeho pomocí lze pro Giniho koeficient psát

$$G(x_1, \ldots, x_n) = 1 - 2S(x_1, \ldots, x_n). \tag{17}$$

Platnost vzorce (17) odůvodníme sestrojením výrazu $(1 - 2S) \cdot 2n\sum x_i$ a další úpravou:

$$\begin{aligned}(1-2S) \cdot 2n\sum_{i=1}^{n} x_i &= 2(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i - 4\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_i \\ &= 4\sum_{i=1}^{n} i x_i - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i.\end{aligned} \tag{18}$$

Avšak srovnáním druhého řádku (18) s identitou (14) zřejmě plyne platnost vzorce (17).

Vzhledem k relativní složitosti výrazu S v (16) se zdá, že odvozený vztah (17) nemá praktické uplatnění. Jeho důležitost je ale opodstatněna potřebou konstrukce grafického znázornění hodnoty Giniho koeficientu, viz dále. Přepišme výraz S na tvar

$$S(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^{j-1} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \frac{\sum_{i=1}^{j} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \tag{19}$$

a přeznačme pro všechna $j = 1, \ldots, n$ zlomky vzniklé za vnějším znakem sumace jako

$$a_j := \frac{\sum_{i=1}^{j-1} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \qquad c_j := \frac{\sum_{i=1}^{j} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{20}$$

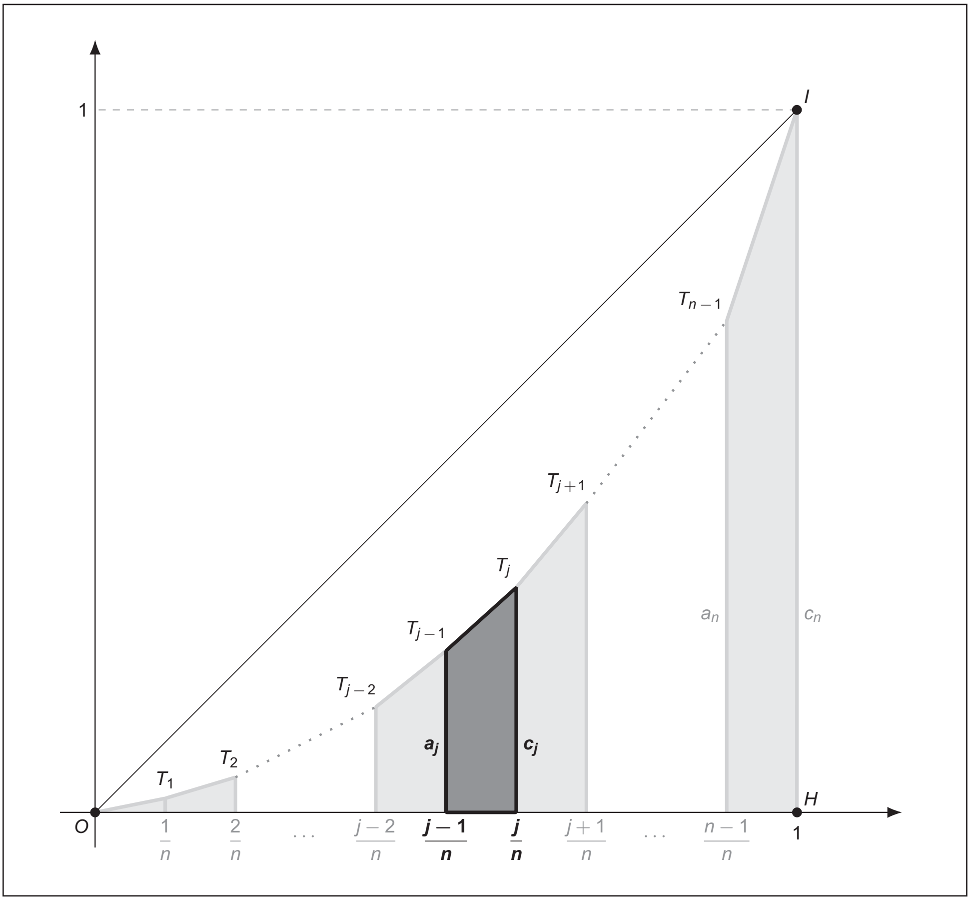
Potom můžeme identitu (19) psát v přehledném tvaru

$$S(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j + c_j}{2} \cdot \frac{1}{n}, \tag{21}$$

kterou lze interpretovat jako součet obsahů n lichoběžníků[6] o základnách a_j, c_j a s konstantními výškami $v_j = 1/n$. To je vyobrazeno na obrázku 1, kde jsou popisované lichoběžníky ve vertikální poloze.

6 Obsah lichoběžníku o základnách a, c a výšce v vypočítáme podle známého vztahu $(a + c) \cdot v / 2$.

Obrázek 1 | Geometrická interpretace výrazu *S* pomocí lichoběžníků



Zdroj: vlastní zpracování

Fakt, že délky základen a_j (a analogicky c_j) tvoří neklesající posloupnost,[7] přímo vyplývá ze způsobu zavedení prvků a_j, c_j v (20). Pro souřadnice bodů O, T_1, …, T_{n-1}, I na obrázku 1 platí

$$O=[0,0], \qquad T_j=\left[\frac{j}{n},c_j\right], \qquad I=[1,1]. \tag{22}$$

Klíčová interpretace výrazu S v (21) nám v dalším umožní plynulý přechod od matematického pojmu Giniho koeficientu k jeho hledané geometrické interpretaci. Než tak ale učiníme, zavádíme nejprve název pro lomenou čáru $OT_1 \ldots T_{n-1}I$ tvořenou „šikmými" rameny lichoběžníků na obrázku 1 jako tzv. *Lorenzovu křivku*.

7 Pro kladné příjmy x_j dokonce progresivně rostoucí posloupnost (případ vyobrazený na obrázku 1).

Skutečnost, že se jedná o lomenou čáru je opět v mnohých textech ignorována[8] a geometricky je Lorenzova křivka nesprávně znázorňována jako hladká nepřímková křivka. Explicitně proto uvádíme následující doporučení.

- *Je-li Giniho koeficient definován pomocí vztahu* (1)*, je znázornění Lorenzovy křivky příslušející datovému souboru* $x_1, \ldots, x_n$ *vždy představeno lomenou čarou* $OT_1 \ldots T_{n-1}I$.

Před dalším zodpovědným postupem bude nutno vyjasnit tvar Lorenzovy křivky pro případ absolutní rovnosti $x_1 = \cdots = x_n = x$, $x \neq 0$. Ovšem z (20) ihned dostáváme

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} x}{\sum_{i=1}^{n} x} = \frac{jx}{nx} = \frac{j}{n}. \tag{23}$$

Veličina c_j tak tvoří konečnou aritmetickou posloupnost vzhledem k proměnné j, a proto lomená čára $OT_1 \ldots T_{n-1}I$ přechází triviálně na úsečku OI, kterou trochu nesprávně nazýváme *přímka absolutní rovnosti*. Graficky je znázorněna na obrázku 1.

Přejděme v dalším ke znázornění hodnoty Giniho koeficientu pomocí Lorenzovy křivky. Ze vztahu (17) snadno dostáváme

$$\frac{1}{2} \cdot G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} - S(x_1, \ldots, x_n). \tag{24}$$

Hodnotu 1/2 na pravé straně rovnosti (24) lze interpretovat jako obsah trojúhelníku ΔOHI, který pokrývá právě polovinu jednotkového čtverce, viz obrázek 1. Proto si lze pravou stranu této rovnosti představit jako obsah plochy mezi přímkou absolutní rovnosti a Lorenzovou křivkou, neboť výraz $S(x_1, \ldots, x_n)$ v rovnici (24) je podle vztahu (21) zastoupen na obrázku 1 plochou mezi Lorenzovou křivkou a vodorovnou osou. Z levé strany rovnosti (24) však vyplývá, že velikost obsahu takto vzniklého útvaru je polovinou hodnoty Giniho koeficientu. Připojujeme tak následující závěr.

- *Plocha vzniklá mezi přímkou absolutní rovnosti a Lorenzovou křivkou vyobrazuje polovinu hodnoty Giniho koeficientu.*

2. Stanovení Giniho koeficientu pro Českou republiku v období 2006–2016

Za pomoci dat z databáze ČSÚ a poznatků předchozí kapitoly je možné stanovit Giniho koeficienty pro Českou republiku v každém roce analyzovaného období let 2006–2016.[9] Vzhledem k tomu, že se v kapitole 3 tohoto článku budeme věnovat zhodnocení daňové progresivity na základě Musgrave-Thinova koeficientu, viz rovnost (26), je nutné pro každý rok vypočítat dva Giniho koeficienty – G a G^*. Výpočet hodnoty Giniho koeficientu G

8 Např. již dříve jmenované publikace (Arnold, 2014), (Jantzen, Volpert, 2012), (Jurečka a kol., 2013), (Samuelson, Nordhaus, 2007) nebo (Zee, 1995).

9 V době zpracování článku (konec roku 2017, resp. začátek roku 2018) nebyla novější data k dispozici.

vychází z hrubých peněžních příjmů (HPP), tedy zjednodušeně z příjmů před zdaněním, zatímco výpočet hodnoty G^* vychází z čistých peněžních příjmů (CPP).[10]

Připomeňme, že CPP domácností (tj. HPP po odečtení daní a odvodů na sociální a zdravotní pojištění) se dle ČSÚ člení na:

- příjmy ze závislé činnosti,
- příjmy z podnikání (zahrnují příjmy ze živností, z lesního a vodního hospodářství, ze zemědělské výroby, z podnikání dle zvláštních předpisů, z výkonu nezávislého povolání, z autorských práv),
- sociální příjmy (součástí jsou důchody, dávky státní sociální podpory, dávky nemocenského pojištění a jiné sociální příjmy),
- ostatní příjmy (obsahují příjmy z kapitálového majetku a jiné ostatní příjmy).

Dále tuto kapitolu rozčleníme na dvě podkapitoly. V první z nich provedeme pomocí vztahu (15) názorný výpočet Giniho koeficientů G a G^* příslušejících roku 2016. V druhé části potom souhrnně uvedeme vypočtené hodnoty Giniho koeficientů pro všechny roky analyzovaného období 2006–2016 a vyobrazíme vývoj hodnoty Giniho koeficientu v závislosti na čase.

2.1 Giniho koeficient České republiky pro rok 2016

Využitím vztahu (15) nyní pomocí HPP a CPP v roce 2016 vypočteme hodnoty odpovídajících Giniho koeficientů a sestavíme obě Lorenzovy křivky pro tento rok. Potřebné výchozí hodnoty pro výpočet hodnot Giniho koeficientů před a po zdanění jsou uvedeny v tabulce 1, kde HPP i CPP jsou seřazeny vzestupně a rozděleny do decilů. To nás opravňuje k použití vzorce (15), jehož platnost je tímto předpokladem podmíněna.

Tabulka 1 | Domácnosti podle decilového rozdělení čistých peněžních příjmů na osobu za rok 2016

	Decilové rozdělení příjmů od nejnižších 10 % po nejvyšších 10 %									
	10 %	**20 %**	**30 %**	**40 %**	**50 %**	**60 %**	**70 %**	**80 %**	**90 %**	**100 %**
HPP_{2016}	74 382	116 218	137 852	148 613	165 422	182 455	206 200	240 393	298 438	495 617
CPP_{2016}	70 914	105 397	123 797	135 815	147 598	161 082	177 402	201 642	242 928	389 956

Zdroj: vlastní zpracování podle databáze ČSÚ

Vzhledem k decilovému rozdělení dat v tabulce 1 pokládáme ve vztahu (15) $n = 10$ a pro hodnoty x_i je v případě HPP $x_1 = 74\ 382, \ldots, x_{10} = 495\ 617$ a analogicky pro CPP. Odtud přímým dosazením do vzorce (15) dostáváme

10 Dle metodiky (ČSÚ, 2017) jsou čisté peněžní příjmy hrubé peněžní příjmy po odečtení zdravotního a sociálního pojištění hrazeného zaměstnancem, daně z příjmů fyzických osob a po přičtení bonusu u daňového zvýhodnění na děti.

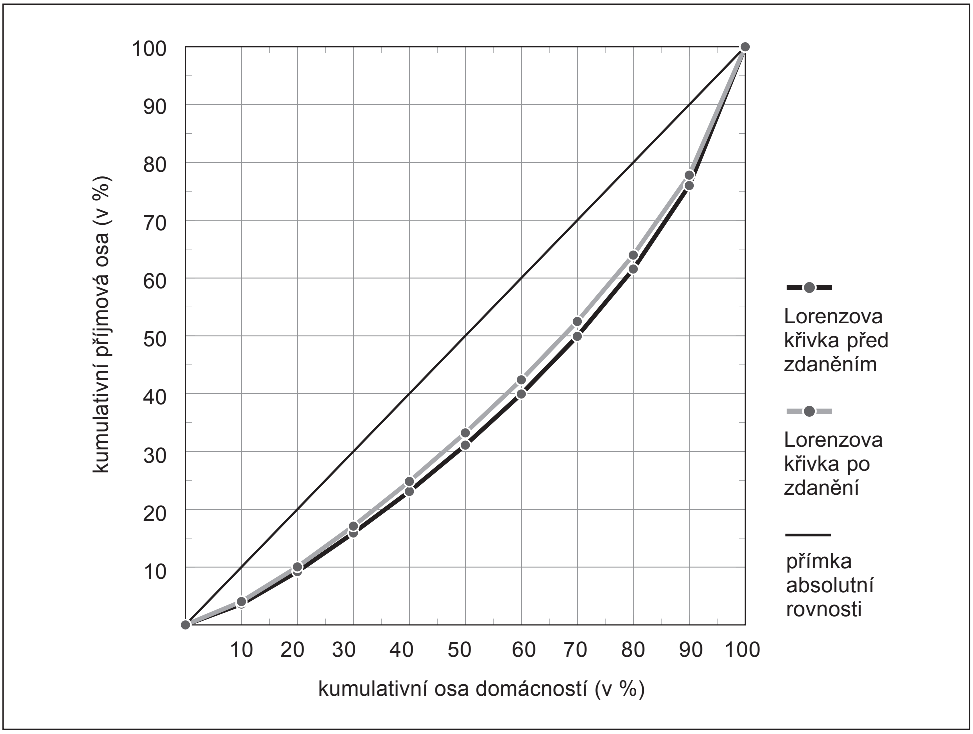
$$G_{2016} = \frac{2 \cdot 14\,245\,322}{10 \cdot 2\,065\,590} - 1 - \frac{1}{10} \approx 0{,}2793,$$

$$G^*_{2016} = \frac{2 \cdot 11\,841\,703}{10 \cdot 1\,756\,531} - 1 - \frac{1}{10} \approx 0{,}2483. \quad (25)$$

Hodnota G^* pro rok 2016 udávající příjmovou nerovnost po zdanění je menší než hodnota udávající příjmovou nerovnost před zdaněním G. Rozdíl ve vypočtených hodnotách lze interpretovat tak, že nízkopříjmové domácnosti sice odvádějí nižší nebo dokonce žádnou daň i menší sociální a zdravotní pojištění, ale zároveň mohou častěji dosáhnout na bonus v podobě daňového zvýhodnění na děti. Vysokopříjmové domácnosti naopak odvádějí vyšší daň i sociální a zdravotní pojištění, na bonus z daňového zvýhodnění na děti ve většině případů nemají nárok. I tato skutečnost přispívá k vyrovnávání rozdílů mezi CPP domácností. Naopak existence tzv. stropu na veřejné zdravotní pojištění v letech 2011 a 2012, resp. sociálního zabezpečení v letech 2011–2016, může v malé míře toto vyrovnání zmírnit.

Lorenzovy křivky ve sledovaném roce jsou znázorněny v grafu na obrázku 2. Z něho je patrné, že Lorenzova křivka po zdanění je blíže přímky absolutní rovnosti. To dokládá menší nerovnost v rozdělení čistých příjmů, což je v souladu s provedeným výpočtem v (25).

Obrázek 2 | Graf Lorenzovy křivky před a po zdanění v roce 2016



Zdroj: vlastní zpracování

2.2 Giniho koeficienty České republiky v letech 2006–2015

Giniho koeficienty, resp. příslušné Lorenzovy křivky v letech 2006–2015, lze vypočítat dle shodného algoritmu jako v podkapitole 2.1 s využitím vzorce (15). Východiskem jsou opět hodnoty HPP a CPP v příslušných letech, které uvádíme v tabulce 2.

Tabulka 2 | Domácnosti podle decilového rozdělení čistých peněžních příjmů na osobu v období 2006–2015

	Decilové rozdělení příjmů od nejnižších 10 % po nejvyšších 10 %									
	10 %	**20 %**	**30 %**	**40 %**	**50 %**	**60 %**	**70 %**	**80 %**	**90 %**	**100 %**
HPP_{2006}	50 515	77 899	93 791	102 527	110 904	120 797	138 070	163 833	202 586	363 132
CPP_{2006}	45 350	67 175	81 196	90 444	97 664	105 687	116 412	133 327	161 014	272 078
HPP_{2007}	53 569	83 670	99 080	108 816	118 573	131 111	148 947	173 899	219 910	381 871
CPP_{2007}	49 123	73 787	88 070	97 701	105 648	114 895	126 962	144 549	175 644	287 918
HPP_{2008}	61 375	94 353	108 560	118 457	129 144	142 238	161 324	189 604	237 257	409 784
CPP_{2008}	55 559	81 674	95 570	105 280	113 960	123 965	136 594	155 888	188 247	308 424
HPP_{2009}	65 385	100 138	115 262	125 423	137 676	153 168	173 127	201 956	250 574	435 596
CPP_{2009}	61 166	89 923	103 998	113 578	123 325	133 898	148 048	168 095	201 662	344 505
HPP_{2010}	65 130	101 333	117 818	128 845	141 765	155 973	178 091	206 302	254 714	433 016
CPP_{2010}	61 442	91 274	107 110	117 414	128 074	139 223	153 777	174 285	209 043	345 818
HPP_{2011}	62 955	101 204	119 067	130 745	143 071	158 647	180 532	211 606	262 279	432 857
CPP_{2011}	60 395	91 869	108 091	118 920	129 726	141 241	156 648	178 933	215 128	346 235
HPP_{2012}	64 805	104 818	123 622	136 232	148 770	163 489	184 618	216 163	267 879	442 420
CPP_{2012}	62 021	94 458	111 798	123 779	134 651	145 798	160 886	182 903	219 587	351 910
HPP_{2013}	68 115	105 963	125 345	139 200	150 822	166 160	185 546	218 810	272 578	448 384
CPP_{2013}	65 394	96 044	113 676	126 356	136 862	148 360	163 666	185 881	224 873	356 448
HPP_{2014}	68 085	107 733	127 353	140 714	153 644	170 051	190 427	222 004	276 882	470 741
CPP_{2014}	65 342	97 825	115 252	128 223	139 009	151 212	166 330	188 020	227 616	373 855
HPP_{2015}	70 662	111 260	131 408	142 491	157 716	172 914	197 253	229 335	285 457	471 670
CPP_{2015}	67 555	100 840	118 137	130 463	141 248	153 888	170 544	193 449	233 243	371 365

Zdroj: vlastní zpracování podle databáze ČSÚ

Politická ekonomie, 2018, 66(6), 732–750, https://doi.org/10.18267/j.polek.1232

Bez podrobného provedení zřejmých výpočtů analogických s (25) uvádíme výsledné hodnoty Giniho koeficientů G a G^{*} v tabulce 3, a to včetně roku 2016.

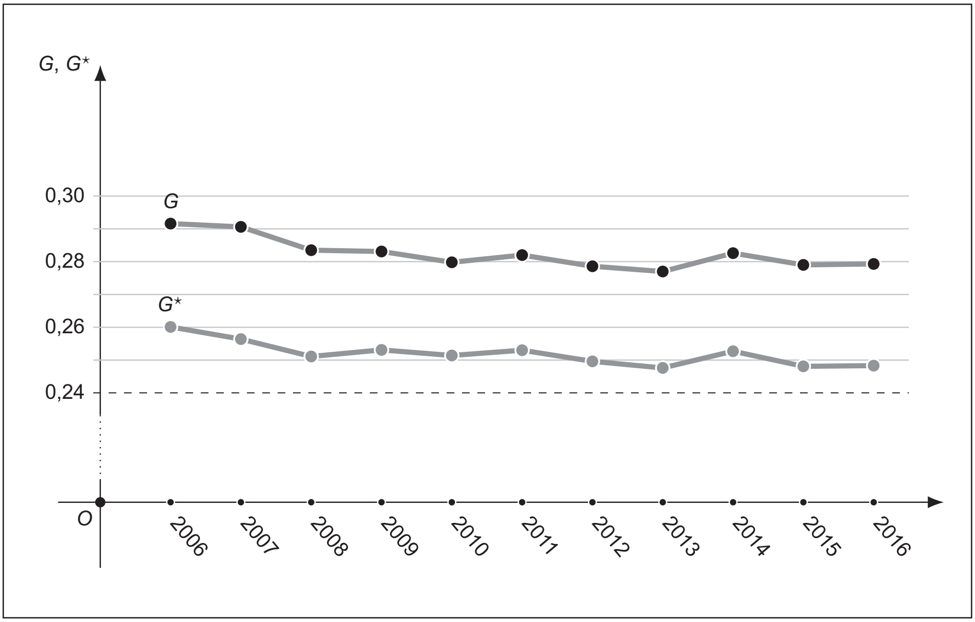
Tabulka 3 | Giniho koeficienty před a po zdanění v období 2006–2016

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
G	0,2916	0,2906	0,2835	0,2831	0,2798	0,2820	0,2786	0,2770	0,2826	0,2790	0,2793
G*	0,2601	0,2564	0,2511	0,2531	0,2514	0,2530	0,2496	0,2476	0,2527	0,2481	0,2483

Zdroj: vlastní zpracování

Hodnoty Giniho koeficientů před a po zdanění ve sledovaných letech 2006–2016 jsou znázorněny v grafu na obrázku 3, kde horní křivka spojuje body odpovídajících hodnot G, dolní body odpovídajících hodnot G^{*}. Již z tabulky 3 bylo zřejmé, že hodnoty Giniho koeficientů před i po zdanění ve sledovaných letech mají až na výjimky spíše klesající tendenci. Tento výsledek je vcelku překvapivý a ukazuje na to, že hospodářská politika, prováděná v analyzovaném období hned několika různě politicky zabarvenými vládami ve svém důsledku nevedla k prohlubování rozdílů mezi vysoce příjmovými a málo příjmovými domácnostmi. To může být mj. být způsobeno i tím, že rovná sazba zavedená v ČR v roce 2008 je (díky velké slevě na dani) ve skutečnosti daní vysoce progresivní.

Obrázek 3 | Grafy vývoje Giniho koeficientů před a po zdanění v období 2006-2016



Zdroj: vlastní zpracování

3. Daňová progresivita v České republice v období 2006–2016

Měření progresivity daní je využíváno ke zjišťování dopadu daně (v tomto případě k dopadu celého daňově-dávkového systému) na různé příjmové skupiny populace. Na disponibilní příjem jedince či domácnosti může daň (včetně transferů jako negativní daně) působit progresivně, proporcionálně nebo regresivně. Stupeň její progresivity udává, zda jsou důchody ve společnosti rozdělovány „spravedlivě", tedy jestli platí, že nižšímu zdanění podléhají příjmy chudších obyvatel.

Obecně můžeme tvrdit, že používání pojmu „spravedlnost" je v ekonomických teoriích diskutabilní a tento pojem spíše patří do oblasti filozofických věd. Jinak posuzuje „spravedlnost" obecná ekonomie, např. teorie blahobytu (Deaton, 1971). Pro účely této stati a z důvodu jejího zaměření se autoři přidržují standardní daňové teorie (např. Salaniè, 2003; James, Nobes, 2016 nebo česky Kubátová, 2015), která člení spravedlnost na horizontální (dva poplatníci se stejnými příjmy by měli platit stejné daně) a vertikální (dva poplatníci s různými příjmy by měli platit různě vysoké daně).

V této kapitole je vypočítána tzv. globální progresivita, kterou je možné chápat jako míru redistribuce, resp. zmírňování, prvotních příjmových nerovností (Kvíčalová, Široký, 2013). Čím je větší redistribuce příjmů ve společnosti, tím je i globální progresivita vyšší.

Obecnou teorii i následnou aplikaci ukazatelů globální progresivity zásadně ovlivnily práce Musgrava a Thina (Musgrave, Thin, 1948), dále Kakwaniho (Kakwani, 1977) a Suitse (Suits, 1977) nebo z novější doby Stroupa (Stroup, 2005). Globální progresivitu lze charakterizovat jako celkovou progresivitu měřenou jedním ukazatelem.

3.1 Globální daňová progresivita měřená indexem *M*

Ekonomové Musgrave a Thin navrhli tzv. index M, který je konstruován na bázi Giniho koeficientu před zdaněním G a Giniho koeficientu po zdanění G^*. *Index M* je definován vztahem

$$M := \frac{1-G^*}{1-G}. \tag{26}$$

Z dříve odvozeného oboru Giniho koeficientu, viz nerovnost (4), vyplývá, že hodnota indexu M je vždy kladná. Mohou proto nastat pouze tři následující stavy:

- pokud $0 < M < 1$, jedná se o *regresivní* daňově-dávkový systém (hodnota G je menší než hodnota G^*),
- pokud $M = 1$, jedná se o *proporcionální* systém (hodnoty G a G^* jsou si rovny),
- pokud $M > 1$, jedná se o *progresivní* systém (hodnota G je větší než hodnota G^*).

Index M je závislý nejen na rozložení daňového břemene mezi poplatníky, ale i na celkové průměrné daňové sazbě. Obecně platí, že vyšší index M vypovídá o vyšší míře progresivity a naopak, což je v souladu s výše uvedeným výčtem stavů.

3.2 Výpočet indexu *M* pro Českou republiku v období 2006–2016

V této podkapitole stanovíme hodnoty indexu M pro všechny roky pozorovaného období. K tomuto účelu využijeme hodnot Giniho koeficientu před a po zdanění z tabulky 3 a definičního vztahu pro index M z rovnice (26). Konkrétní výpočet provedeme opět pouze pro rok 2016, pro který platí

$$M_{2016} = \frac{1-0,2483}{1-0,2793} \approx 1,0430. \tag{27}$$

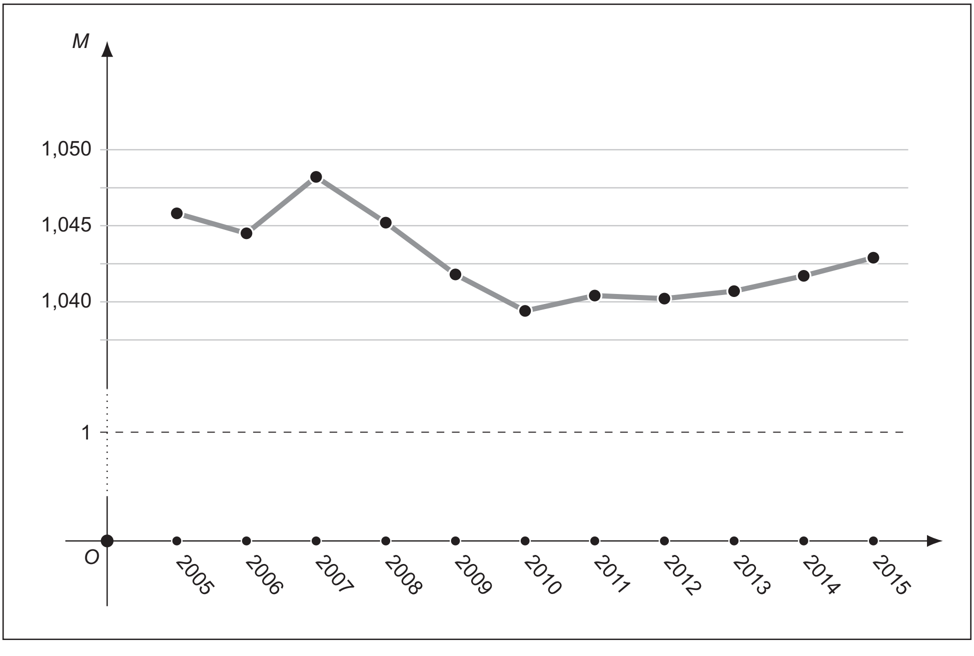
Stanovená hodnota indexu M_{2016} vypovídá podle přehledu z podkapitoly 3.1 o skutečnosti, že míra zdanění byla v tomto roce slabě progresivní. Podobně lze vypočítat i hodnoty indexu M pro zbytek období 2006–2016. Jejich hodnoty uvádíme souhrnně v tabulce 4.

Tabulka 4 | Index progresivity *M* v období 2006–2016

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
M	1,0445	1,0482	1,0452	1,0418	1,0394	1,0404	1,0402	1,0407	1,0417	1,0429	1,0430

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 4 | Graf vývoje indexu globální progresivity *M* v období 2006–2016



Zdroj: vlastní zpracování

Vypočtené údaje z tabulky 4 jsou vyobrazeny na obrázku 4, ze kterého je zřejmé, že se hodnoty indexu M v daných letech výrazně neliší (variační rozpětí nepřesahuje hodnotu 0,01). Nejvyšší míra progresivity byla zaznamenána v roce 2007, naopak nejnižší v roce 2010. Od roku 2012 je možno identifikovat nepřerušené zvyšování globální daňové progresivity měřené indexem M.

Diskuse a závěr

Článek je po obsahové stránce poměrně specifický, neboť jeho první část (kapitola 1) má matematicko-didaktickou povahu, zatímco pomyslná druhá část (kapitoly 2, 3) se zaměřovala na konkrétní aplikaci. Z tohoto hlediska je možné také identifikovat dva jeho základní cíle.

Prvním cílem bylo popsat vybrané matematické aspekty pojmu Giniho koeficient. Autoři představili sedm konkrétních doporučení, která umožňují nápravu desinterpretací pojmu Giniho koeficient vyskytujících se v řadě současných textů. Tato doporučení shrnují matematická tvrzení příslušných podkapitol. Mezi ně patří především skutečnost, že horní hranice Giniho koeficientu nemůže dosáhnout jednotkové hodnoty, což je přinejmenším v české literatuře nesprávně uváděno (Kubátová, 2015 nebo Kvíčalová, Široký, 2013). Odvozená geometrická interpretace umožnila logické zavedení Lorenzovy křivky a také interpretaci absolutní příjmové rovnosti a nerovnosti. Jak dokládají četné bibliografické odkazy v článku, výklady o Giniho koeficientu a Lorenzově křivce jsou sice v odborných textech uváděny v úzké souvislosti, avšak jejich teoretické propojení není dostatečně nebo dokonce vůbec patrné. Čtenář tak zásadně postrádá informaci o tom, proč lze hodnotu Giniho koeficientu vizualizovat pomocí Lorenzovy křivky, a proto je často nucen přijmout fakta konstatovaná v literatuře bez řádného porozumění poměrně hluboké souvislosti těchto pojmů užívaných v ekonomické praxi. To mj. poukazuje na fakt, že exaktní matematické metody jsou důležitým nástrojem pro studium a popis nejen běžných ekonomických skutečností, ale také nedílnou součástí doprovázející seriózní přístup při studiu ekonomických disciplín. V matematické části článku poukazujeme na jednotlivá pochybení plynoucí z akceptování „faktů“ a jejich nedůslednému porozumění. V souladu s těmito zjištěními autoři doporučují přijetí patřičných opatření týkajících se výkladu pojmů Giniho koeficient a Lorenzova křivka a jejich dalších vlastností tak, aby nedocházelo k vážnějším faktickým odchylkám.

Druhý cíl stati byl výpočet Giniho koeficientů pro Českou republiku v období let 2006–2016, přičemž na jejich základě bylo možno poukázat na stav redistribuční funkce daňově-dávkového systému. Hodnoty Giniho koeficientu v jednotlivých letech analyzovaného období ilustrují fakt, že příjmová nerovnost v České republice není vysoká a neexistuje jasný trend její změny. Je také nutno poznamenat, že stupeň redistribuce může mít vliv i na vývoj makroekonomických indikátorů (Fiľo, Buchtová, 2010). Autoři pracují také s hodnotou čistých příjmů domácností. Ty jsou samozřejmě ovlivňovány i transfery (dávky státní sociální podpory, starobní důchody, nemocenské, mateřské aj.), které v ekonomickém vyjádření představují „negativní“ daně.

Výsledné hodnoty globální daňové progresivity ilustrují téměř konstantní stav tohoto ukazatele daňového systému České republiky (v případě, kdy transfery jsou chápány jako negativní daň) a rovněž demonstrují fakt o malém vlivu změn v konstrukci stanovení daňové sazby u osobní důchodové daně v České republice. U daně záleží zejména na dalších konstrukčních prvcích (slevách, nezdanitelných částech základu daně či odpočitatelných položkách od základu daně), které i v prostředí rovné sazby daně znamenají její progresivitu.

Výsledky dosažené korektní matematicko-ekonomickou analýzou jsou vcelku překvapivé a ukazují na to, že hospodářská politika, prováděná v analyzovaném období, nevedla k prohlubování rozdílů mezi vysoce příjmovými a málo příjmovými domácnostmi.

Závěrem zmiňujeme možná navazující bádání v této problematice. Ta mohou spočívat jednak v zapojení dalších nástrojů hospodářské politiky do těchto výzkumů, jednak v aktualizaci zkoumaného období. (K datu odevzdání rukopisu byla známa data do roku 2016.)

Literatura

Allison, P. D. (1978). Measures of Inequality. *Americal Sociological Review,* 43(6), 865–880, https://doi.org/10.2307/2094626

Arnold, R. A. (2014). *Economics.* 11th Edition. Mason: Cengage Learnings. ISBN 978-1-133-18975-6-1.

Ceriani, L., Verme, P. (2012). The Origins of the Gini Index: Extracts from Variabilità e Mutabilità (1912) by Corrado Gini. *The Journal of Economic Inequality,* 10(3), 421–443, https://doi.org/10.1007/s10888-011-9188-x

Cerone, P., Dragomir, S. S. (2006). Bounds for the Gini Mean Difference of an Empirical Distribution. *Applied Mathematics Letters,* 19(3), 283–293, https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.05.009

ČSÚ (2017). *Příjmy a životní podmínky domácností – 2016.* [Cit. 2018-03-16] Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/prijmy-a-zivotni-podminky-domacnosti-2016

Deaton, A. (1971). Wealth Effects on Consumption in a Modified Life-Cycle Model. *Review of Economic Studies,* 39(4), 443–453, https://doi.org/10.2307/2296512

Fiľo, P., Buchtová, B. (2010). The Relationship Between Unemployment Duration and Selected Personality Characteristic of Unemployed People. *Acta Univ. Agric. Silvic. Mendelianae Brun.,* 58(6), 123–132, https://doi.org/10.11118/actaun201058060123

Houghton, J., Khandker, S. R. (2009). *Handbook of Poverty and Inequality.* Washington, DC: World Bank. ISBN 978-0-8213-7613-3.

Chenery, B. H., Ahluwalia, M. S., Bell, C. L. et al., eds. (1974). *Redistribution with Growth.* New York etc., Oxford University Press. ISBN 0-19-920070-X.

James, S., Nobes, Ch. (2016). *The Economics of Taxation.* 16th Edition. Birmingham, etc.: Fiscal Publications. ISBN 978-19-0620-132-6.

Jantzen, R. T., Volpert, K. (2012). On the Mathematics of Income Inequality: Splitting the Gini Index in Two. *The American Mathematical Monthly,* 119(10), 824–837, https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.10.824

Jurečka, V. a kol. (2013). *Mikroekonomie.* 2. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4385-1.

Kakwani, N. C. (1977). Measurement of Tax Progressivity: An International Comparison. *The Economic Journal,* 87(345), 71–80, https://doi.org/10.2307/2231833

Kubátová, K. (2015). *Daňová teorie a politika.* 6. vyd. Praha: Wolters Kluwer. ISBN 978-80-7478-841-3.

Kvíčalová, J., Široký, J. (2013). Quantification of Factors Influencing the Difference in Houselhold Income in the Czech Republic. *Acta Univ. Agric. Silvic. Mendelianae Brun.,* 61(4), 995–1003, https://doi.org/10.11118/actaun201361040995

Lambert, P. J. (2002). *The Distribution and Redistribution of Income.* 3rd Edition. Manchester: Manchester University Press. ISBN 978-0-7190-5732-8.

Marek, L. (2010). Analýza vývoje mezd v ČR v letech 1995–2008. *Politická ekonomie,* 58(2), 186–206, https://doi.org/10.18267/j.polek.726

Musgrave, R. A., Thin T. (1948). Income Tax Progression 1929–48. *Journal of Political Economy,* 56(6), 498–514, http://doi.org/10.1086/256742

OECD (2017). *Terms of Reference OECD Project on the Distribution of Household Incomes.* [Cit. 2018-03-16] Dostupné z: http://www.oecd.org/els/soc/IDD-ToR.pdf

Plata-Pérez, L., Sánchez-Peréz, J., Sánchez-Sánchez, F. (2015). An Elementary Characterizetion of Gini Index. *Mathematical Social Sciences,* 74, 78–83, https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2015.01.002

Salanié, B. (2003). *Economics of Taxation.* Cambridge: MIT Press. ISBN 978-0262-19486-0.

Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D. (2007). *Ekonomie.* 18. vyd. Praha: Svoboda. ISBN 978-80-20-50590-3.

Schelleckens, M. et al. (2017). *European Tax Handbook 2017.* Amsterdam: IBDF. ISBN 978-90-8722-407-3.

Sen, A. K. (1997). *On Economic Inequality.* Oxford: Oxford university Press. ISBN 978-01-982-8193-1.

Stroup, M. (2005). An Index for Measuring Tax Progressivity. *Economics Letters,* 86(2), 205–213, https://doi.org/10.1016/j.econlet.2004.06.017

Suits, D. B. (1977). Measurement of Tax Progressivity. *American Economic Review,* 4(67), 747–752.

Vančurová, A., Láchová, L. (2018). *Daňový systém ČR 2018.* 14. vyd. Praha: 1. VOX. ISBN 978-80-87480-55-7.

Vítek, L. (2008). *Ekonomická analýza zdanění příjmů.* Praha: IREAS. ISBN 978-80-86684-50-5.

World Bank (1990). *Inequality: Methods and Tools.* [Cit. 2018-03-16] Dostupné z: http://www.worldbank.org/poverty/inequal/index.htm

Zee, H. H. (1995). Taxation and Equity, in P. Shome, ed. *Tax Policy Handbook.* Washington DC: FAD IMF. ISBN 978-15-577-5490-5.

Zenga, M. et al. (2014). The Variance of Gini's Mean Difference and its Estimators. *Statistica,* 64(3), 455–475, https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/50

Zvára, K. (2013). *Základy statistiky v prostředí R.* Praha: Nakladatelství Karolinum. ISBN 978-80-246-2245-3.